# Probeklausur zur Mathematik 2 für Maschinenbau
## Mittwoch, 8. Juni 2005

**Aufgabe 1:** Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$

a) Welche Figur beschreibt diese Funktion?

Ein Paraboloid mit dem Scheitelpunkt in $S = (1,0)$.

b) Bilden Sie den Gradienten.

$$grad\, f(x,y) = (-2(1-x),\, 2y).$$

c) Gesucht ist das Maximum der Funktion unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} - 1 = 0,$$

d.h. der Punkt befindet sich über der Ellipse, die durch $g$ beschrieben wird.

Dies ist ein Extremwertproblem mit Nebenbedingung. Wir setzen $grad\, f = \lambda\ grad\, g$. Es ist $grad\, g(x,y) = (x/2, 2y)$. Dadurch erhalten wir zwei Gleichungen, zusammen mit der Gleichung $g(x,y) = 0$ haben wir also drei Gleichungen und drei Unbekannte $x, y, \lambda$.

$$\left.\begin{array}{rcl} -2(1-x) & = & \lambda\, \frac{x}{2} \\ 2y & = & \lambda\, 2y \\ \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 & = & 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcll} -4(1-x) & = & \lambda\, x & \quad I \\ y & = & \lambda\, y & \quad II \\ x^2 + 4\,y^2 - 4 & = & 0 & \quad III \end{array}\right.$$

Aus Gleichung zwei folgt: Entweder $y = 0$ oder $\lambda = 1$.

**Fall 1:** $y = 0$
Aus Gleichung III folgt dann $x^2 = 4$ oder $x = \pm 2$. Mögliche Extrema sind daher $E_1 = (-2,0)$ und $E_2 = (2,0)$.

**Fall 2:** $\lambda = 1$
Gleichung II lautet damit $-4 + 4x = x$ oder $3x = 4$. $x$ ist in diesem Falle $x = 4/3$. Den y-Wert erhalten wir aus der III.ten Gleichung.

$$4y^2 = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

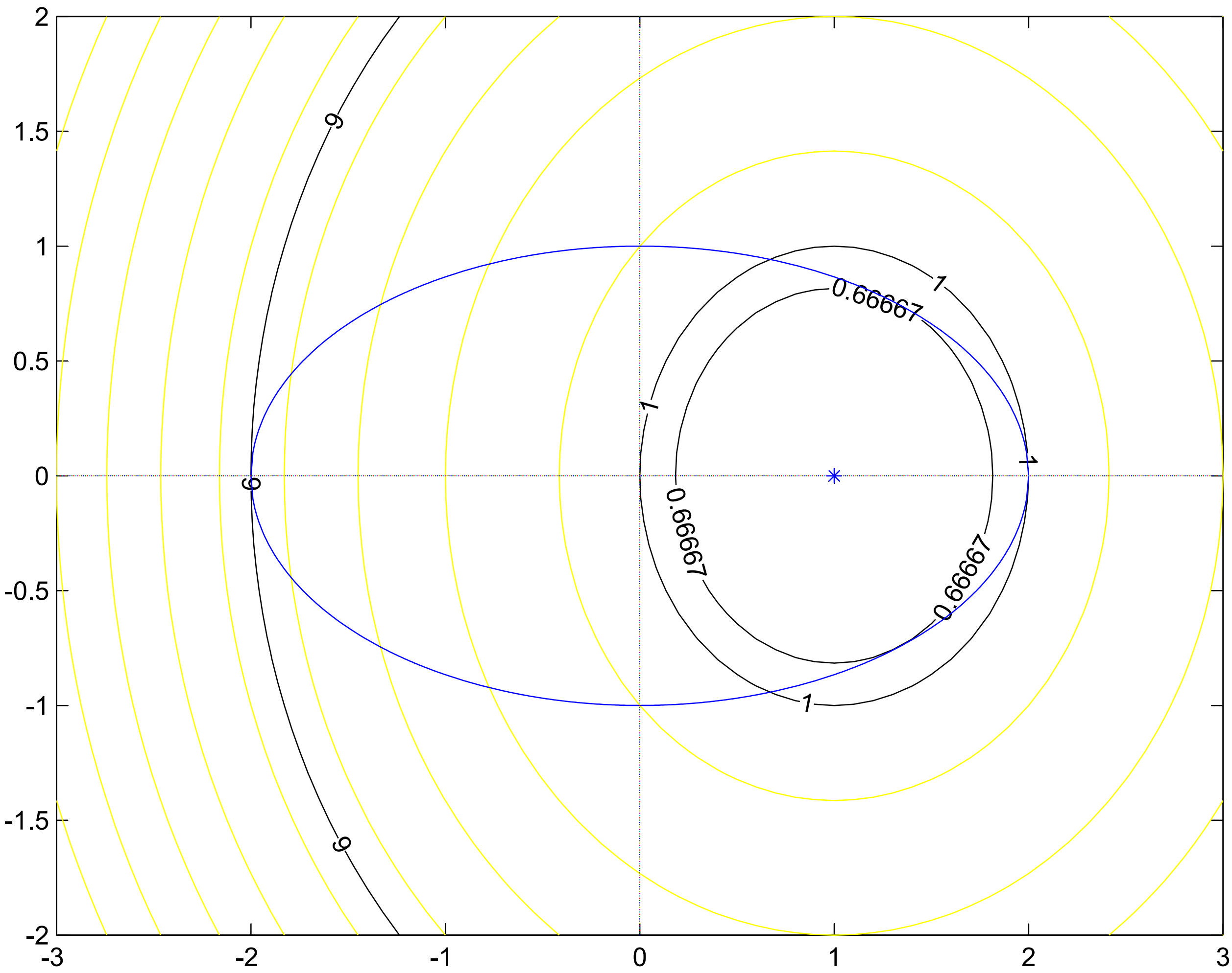
Also haben wir zwei weitere mögliche Extrema $E_3 = (4/3,\, \sqrt{5}/3)$ und $E_3 = (4/3,\, -\sqrt{5}/3)$.

Um herauszubekommen, welcher Wert das Maximum ist, setzen wir die Kandidaten in die Funktion $f$ ein. Es ist

$$f(E_1) = (x-1)^2 + y^2 = (-2-1)^2 + 0^2 = 3^2 = 9$$
$$f(E_2) = (x-1)^2 + y^2 = (2-1)^2 + 0^2 = 1^2 = 1$$
$$f(E_3) = f(E_4) = (x-1)^2 + y^2 = (\frac{4}{3} - 1)^2 + \frac{5}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Offensichtlich ist $E_1$ das Maximum, $E_3$ und $E - 4$ sind Minima und $E_2$ ist kein Extremum.

d) Machen Sie eine Skizze der Höhenlinien von $f$ und $g$ inklusive aller Extrema von $f$ unter der Nebenbedingung $g$.



2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
9
9
9
1
0.66667
1
0.66667
1
0.66667
1

**Aufgabe 2:** Entwickeln Sie $f(x) = \tan(x) + \cos(x)$ in eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $\pi$, indem Sie die Beziehung

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

nutzen und die Quotientenregel anwenden. Berechnen Sie mindestens vier nicht verschwindende Glieder (d.h. drei Ableitungen). Zeichnen Sie die erste Näherung und wenn möglich die Funktion.

Wir berechnen als erstes die Ableitungen und werten sie im Punkt $x_0 = \pi$ aus.

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x$ $\quad$ $f(x = \pi) = 0 - 1 = -1$

$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{cos^2 x} - \sin x = \frac{1}{cos^2 x} - \sin x$ $\quad$ $f'(x = \pi) = 1 - 0 = 1$

$f''(x) = \frac{-2\,\cos x\,(-\sin x)}{\cos^4 x} - \cos x = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} - \cos x$ $\quad$ $f''(x = \pi) = 0 + 1 = 1$

$f^{(3)}(x) = 2\frac{\cos x\,\cos^3 x - \sin x\, 3\cos^2 x(-\sin x)}{\cos^6 x} + \sin x = 2\frac{\cos^2 x + 3\,\sin^2 x}{\cos^4 x} + \sin x$

$= 2\frac{1 + 2\,\sin^2 x}{\cos^4 x} + \sin x$ $\quad$ $f^{(3)}(x = \pi) = 2 + 0 = 2$

[Beachten Sie dabei

1. die Quotientenregel
2. die Kettenregel: $\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = (cos^{-2}x)' = -2\cos x \cdot \sin x$
3. die Beziehung: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$]

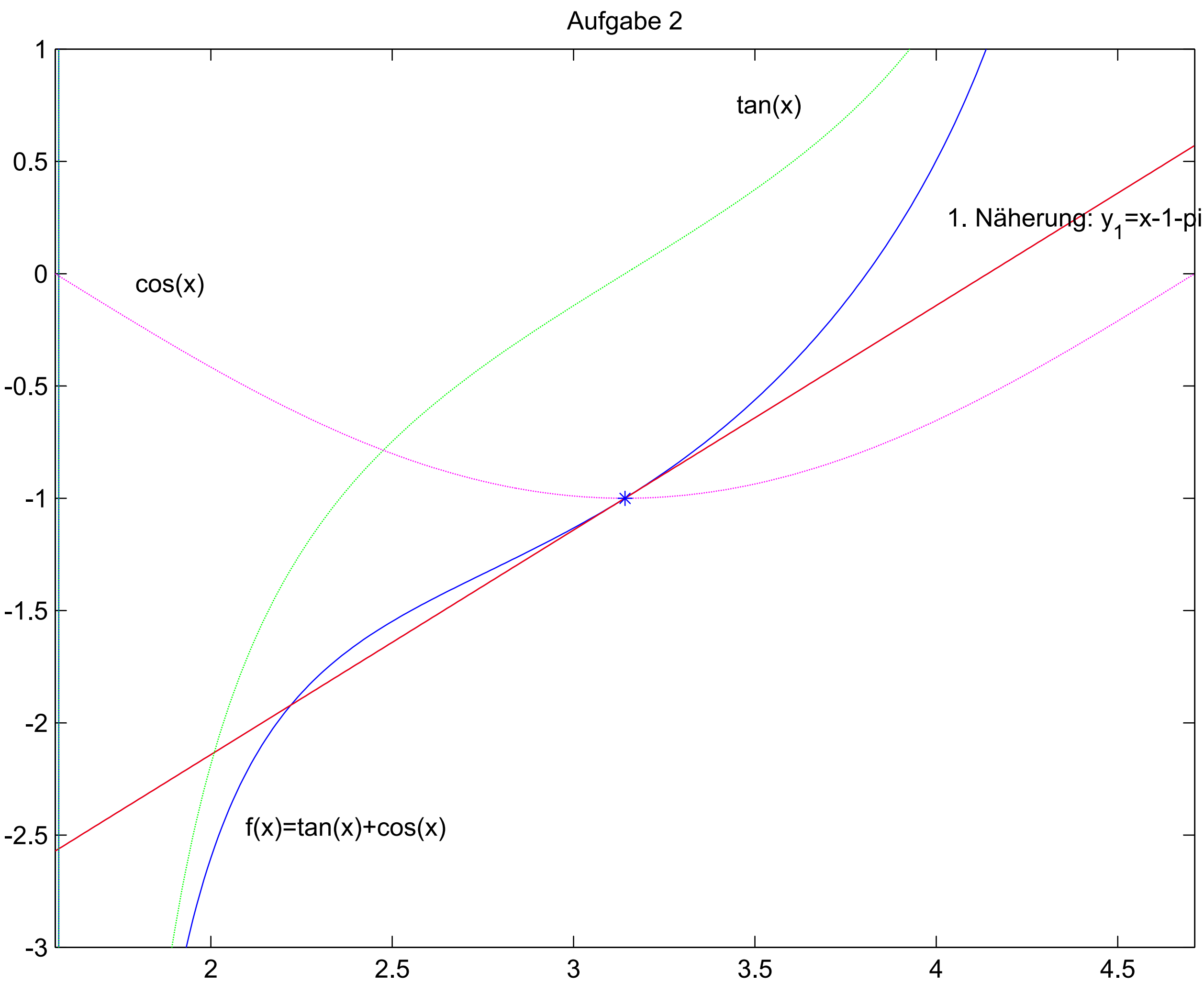
Eingesetzt in die Taylorreihe

$$f(x) \quad = \quad f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x - \pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x - \pi)^2 + \frac{f^3(\pi)}{3!}(x - \pi)^3 + ...$$

ergibt sich daraus:

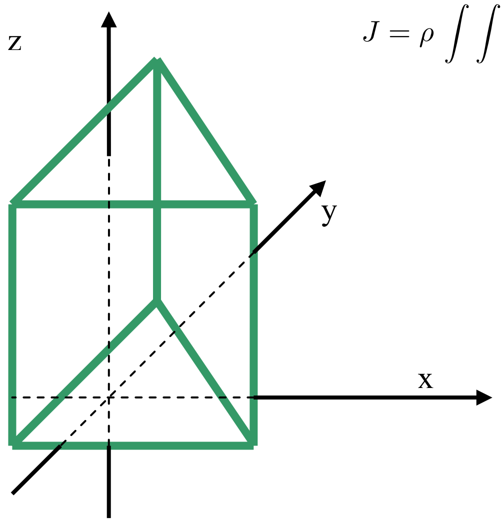
$$\begin{aligned} f(x) &= -1 + \frac{1}{1!}(x - \pi) + \frac{1}{2!}(x - \pi)^2 + \frac{2}{3!}(x - \pi)^3 + ... \\ &= -1 + (x - \pi) + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 + \frac{1}{3}(x - \pi)^3 + ... \end{aligned}$$

Die erste Näherung lautet daher: $f_1(x) = -1 + x - \pi = x - 1 - \pi$.

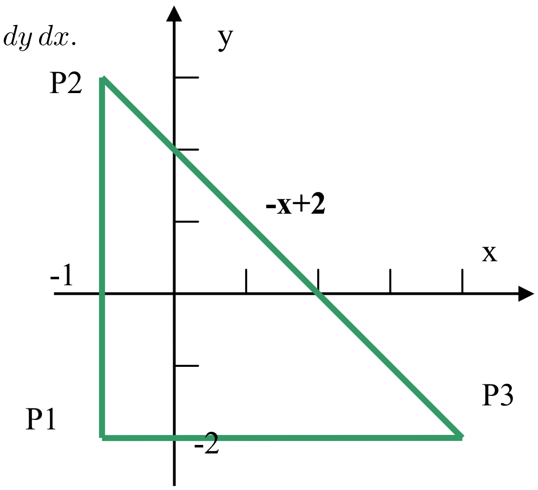


Aufgabe 2
tan(x)
1. Näherung: y1=x-1-pi
cos(x)
f(x)=tan(x)+cos(x)
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
2
2.5
3
3.5
4
4.5

**Aufgabe 3:** Ein Körper besitze eine Grundfläche in der x-y-Ebene mit der Form eines Dreieckes und die Höhe $h = 5$. Das Dreieck ist gegeben durch die drei Eckpunkte $P_1 = (-1, -2)$, $P_2 = (-1, 3)$ und $P_3 = (4, -2)$ (Skizze).
Berechnen Sie für konstantes $\rho$ das Massenträgheitsmoment bzgl. der z-Achse




$$J = \rho \int\int\int (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx.$$




Der Körper ist ein Zylinder, die Höhe ist 5cm. Damit ist $0 \le z \le 5$.
Aus der Skizze geht hervor: $-1 \le x \le 4$ und $-2 \le y \le -x + 2$.

Nachdem die Parametrisierung gegeben ist, muss das Integral nur noch berechnet werden.

$$J = \rho \int\limits_{-1}^{4} \int\limits_{-2}^{-x+2} \int\limits_{0}^{5} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx$$

**1. Integral:**

$$\int\limits_0^5 (x^2+y^2)\, dz = (x^2+y^2) z|_0^5 = 5(x^2+y^2)$$

**2. Integral:**

$$\int\limits_{-2}^{-x+2} 5(x^2 + y^2)\, dy = 5\left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3\right]_{-2}^{-x+2} = 5\left[x^2(-x+2) + \frac{1}{3}(-x+2)^3 - x^2(-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right]$$

$$= 5\left[-x^3 + 2x^2 + \frac{1}{3}(-x+2)^3 + 2x^2 + \frac{8}{3}\right] = 5\left[-x^3 + \frac{1}{3}(-x+2)^3 + 4x^2 + \frac{8}{3}\right]$$

**3. Integral:**

$$\int\limits_{-1}^{4} 5\left[-x^3 + \frac{1}{3}(-x+2)^3 + 4x^2 + \frac{8}{3}\right] dx = 5\left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}(-x+2)^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x\right]_{-1}^{4}$$

$$= \quad 5\left[-4^3 - \frac{1}{12}(-2)^4 + \frac{2}{3}4^3 + \frac{8}{3}4 - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{12}3^4 - \frac{2}{3} - \frac{8}{3}\right)\right] = 5 \cdot 12\frac{11}{12} = 64\frac{7}{12}$$

Damit ist das Massenträgheitsmoment $J = 64\frac{7}{12}\,\rho$.

**Aufgabe 4:** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y(1-x)\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \qquad\qquad y(0) = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Wir lösen die Differentialgleichung mithilfe der Trennung der Variablen:

$$y\frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{1-x}dx \quad \Rightarrow \quad \int y\frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{1}{1-x}dx.$$

Während das Integral über $x$ einfach zu lösen ist, bedarf das Integral über $y$ einer Substitution. Wir substituieren

$$u = 1-y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = -2y \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}du = y\,dy,$$

Damit lösen wir das Integral

$$\int y\frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{1}{1-y^2}y\,dy = \int \frac{1}{u}\left(-\frac{1}{2}du\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{2}\ln|u| = -\frac{1}{2}\ln|1-y^2|$$

und setzen mit der rechten Seite der Dgl gleich:

$$-\frac{1}{2}\ln|1-y^2| = -\ln|1-x| + \ln c \quad \Rightarrow \quad \ln|1-y^2| = 2(\ln|1-x| - \ln c) = 2\ln\left|\frac{1-x}{c}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \ln|1-y^2| = \ln\left(\frac{1-x}{c}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 1-y^2 = \frac{(1-x)^2}{c^2}$$

daraus folgt

$$1 = \frac{(1-x)^2}{c^2} + y^2 \quad \text{oder} \quad y = \pm\sqrt{1-\frac{(1-x)^2}{c^2}}$$

Wir lösen das Anfangswertproblem:

$$1 = \frac{(1-0)^2}{c^2} + \sqrt{\frac{3}{4}}^2 = \frac{1}{c^2} + \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad c^2 = 4$$

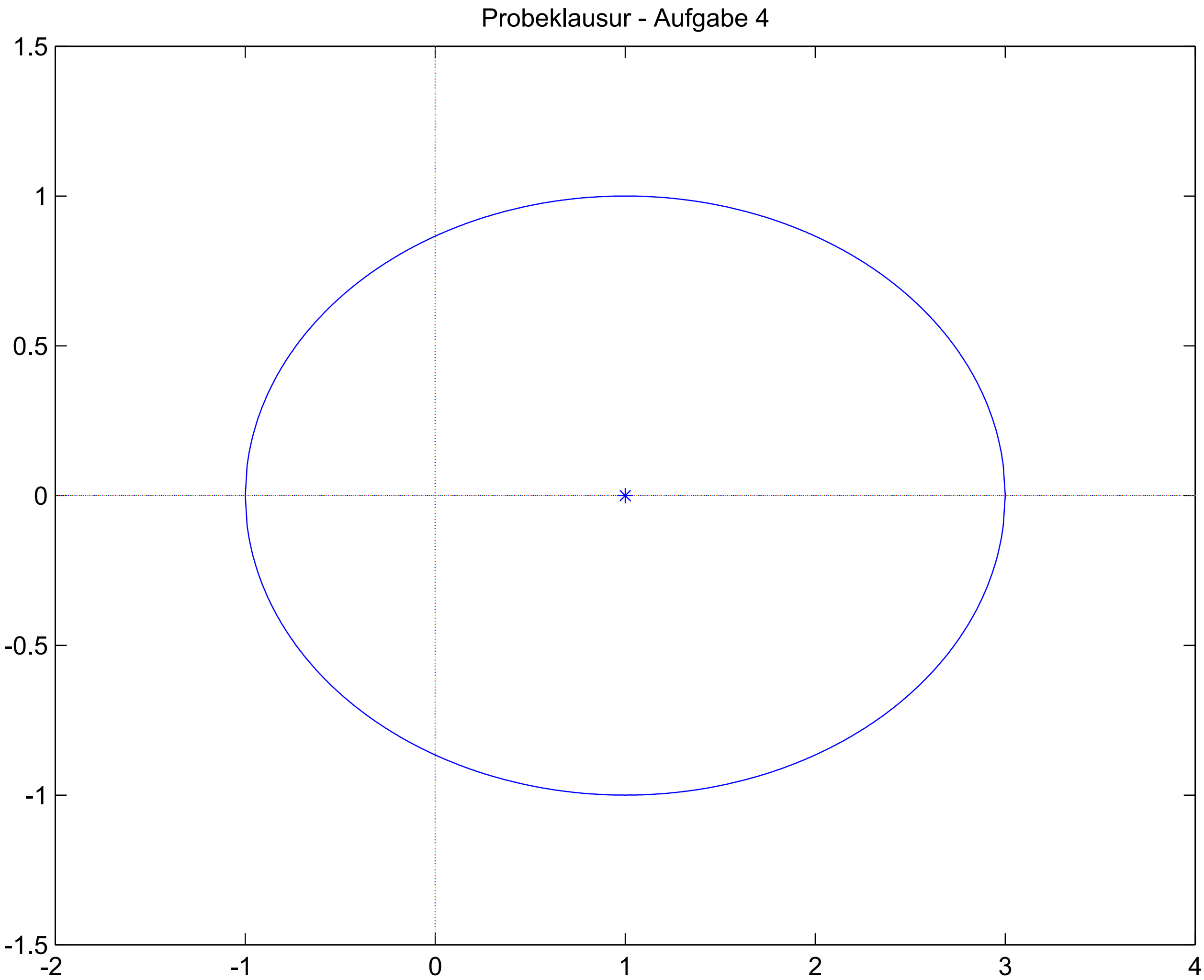
Die spezielle Lösung

$$1 = \frac{(1-x)^2}{4} + y^2$$

ist eine Ellipse der Form

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

mit dem Mittelpunkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$ und den Achsen $a = 2, b = 1$.


Probeklausur - Aufgabe 4
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1
0
1
2
3
4