Lösung zur Klausur zur Mathematik 2 für M&P, 18.12.2004

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

a) Skizzieren Sie diese Funktion.
b) Wie heißt die Kurve?
Sie heißt Gaußsche Glockenkurve.
Die allgemeine Form der Funktion heißt Gaußsche Normalverteilung und lautet

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}.$$

Dabei ist μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung. $f(x)$ ist symmetrisch zur Geraden $x = \mu$, hier liegt auch das einzige Maximum. Die Funktion ist normiert, d.h. die Fläche unter der Dichtefunktion hat den Wert Eins (Sie sollten daher bei Aufgabe d einen Wert kleiner als Eins herausbekommen). In unserem Falle ist $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ und wir sprechen von Standardnormalverteilung. Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten einer normalverteilten Zufallsgröße erfolgt in der Anwendung stets mit Hilfe der in der Integralform dargestellten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Die Wahrscheinlichkeit P dafür, dass der Abstand $|X - \mu|$ einer Variablen X vom Erwartungswert μ geringer ist als die Standardabweichung σ ist kleiner als 0,683 (in Formel: $P(|X - \mu| < \sigma) < 0,683$). D.h. rund 68,3 % aller Werte der Zufallsvariablen X liegen im abgeschlossenen Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$. Für unsere Normalverteilung bedeutet dies: Das Integral von $[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = [-1, 1]$ ist ungefär 0,683.

c) Berechnen Sie die Mac Laurinsche Reihe T_n (Taylorreihe mit Entwicklungspunkt Null) bis zum dritten nichtverschwindenen Glied.
Es ist nach Kettenregel $f' = -x\,f$, der Rest geht mit Produktregel.

Ordnung	Ableitung	Auswertung
0	$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
1	$f' = -x\,f$	0
2	$f^{(2)} = -f - xf' = -f - x(-xf) = (x^2 - 1)f$	$-f(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
3	$f^{(3)} = 2xf + (x^2 - 1)f' = 2xf + (x^2 - 1)(-xf) = (-x^3 + 3x)f$	0
4	$f^{(4)} = (-3x^2 + 3)f + (-x^3 + 3x)f' = (x^4 - 6x^2 + 3)f$	$3f(0) = 3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Damit ist

$$T(x) = f(0) + \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2!} x^2 + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{4!} x^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{24} x^4\right)$$

$$\Longrightarrow T_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{8} x^4\right)$$

d) Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ näherungsweise durch $\int_{-1}^{1} T_n(x)dx$.
Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)dx &\approx \int_{-1}^{1} T_4(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4\right) dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4\right) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{101}{120} \approx 0,6715
\end{aligned}$$

Bemerkung: Vergleiche (b).

Aufgabe 2: Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = -2ty + te^{-t^2}$.

Lösen Sie die Differentialgleichung und das Anfangswertproblem $y(0) = 2$.

Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung mit Störglied te^{-t^2}. Wir lösen zuerst die homogene, dann die inhomogene Gleichung:
Die homogene Gleichung lautet $y' = -2ty$ und läßt sich sehr leicht durch Trennung der Variablen lösen:

$$y_h' = -2ty_h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy_h}{y_h} = -2t\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y_h| = -t^2 + c \quad \Leftrightarrow \quad y_h = e^{-t^2+c} = \kappa e^{-t^2} \text{ mit } \kappa = e^c$$

Für die inhomogene Geichung wählen wir die Variation der Konstanten. Sei $y_p = \kappa(t)e^{-t^2}$.
Dann folgt $y_p' = \kappa(t)'e^{-t^2} + \kappa(t)(-2te^{-t^2}) = \kappa(t)'e^{-t^2} - 2ty_p$.
Soll dies eine Lösung der Aufgabengleichung sein, so ist $\kappa(t)'e^{-t^2} = t\,e^{-t^2}$ und damit $\kappa(t)' = t$.
Durch Integration erhalten wir $\kappa(t) = \frac{1}{2}t^2 + \tilde{c}$ ($\tilde{c}$ Integrationskonstante), so dass die partikulre Lösung gegeben ist durch $y_p = \left(\frac{1}{2}t^2 + \tilde{c}\right) e^{-t^2}$.

Die Gesamtlösung des Systems ist definiert durch $y = y_h + y_p$ und somit ist

$$y(t) = \kappa e^{-t^2} + \left(\frac{1}{2}t^2 + \tilde{c}\right) e^{-t^2} = \left(\frac{1}{2}t^2 + c^*\right) e^{-t^2}$$

mit $\kappa + \tilde{c} = c^*$.

Die Anfangswertaufgabe ergibt sich durch Einsetzen von $t = 0$ in y:

$$y(0) = \left(\frac{1}{2}0^2 + c^*\right) e^{-0^2} = c^* \quad \text{also ist} \quad y(0) = 2 \;\text{ genau dann wenn }\; c^* = 2$$

Und so folgt

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + 2\right) e^{-t^2}$$

Aufgabe 3: a) Berechnen Sie die Minima, Maxima und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) := 2x^2 + \cos(y).$$

Extremwerte und Sattelpunkte existieren nur in den Punkten, in denen der Gradient verschwindet, d.h. wir berechnen zuerst den Gradienten und die Nullstellen des Gradienten.

$$grad\, f(x,y) := (4x, -\sin y) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad 4x = 0 \text{ und } \sin y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ und } y = k\,\pi$$

Ob es sich bei diesen Punkten um Extrema oder Sattelpunkte handelt, erfahren wir mithilfe der Hessematrix

$$Hf(x,y) := \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix}.$$

Ist die Determinante der Hessematrix

$$\Delta := \det Hf(x,y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \left(f_{xx}\, f_{yy} - f_{xy}^2\right).$$

- positiv, so handelt es sich um Extremum, und zwar ein
  - Minimum, wenn $f_{xx} > 0$ ist und ein
  - Maximum, wenn $f_{xx} < 0$ ist.
- negativ, so ist ein Sattelpunkt gegeben
- gleich Null, so kann keine Aussage gemacht werden.

In unserem Fall ist $Hf(x,y) = -4\cos y$ unabhängig von x. Da $\cos 0 = \cos 2\pi = \cos 4\pi = \ldots = 1$ und $\cos -\pi = \cos\pi = \cos 3\pi = \ldots = -1$ ist

$$Hf(0,k\pi) = \begin{cases} -4 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 4 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also folgt:

Für k gerade ist $Hf(0,k\pi)$ negativ, daher ist $P = (0,k\pi)$ Sattelpunkt.

Für k ungerade ist $Hf(0,k\pi)$ positiv, daher ist $P = (0,k\pi)$ Extremum. Mit $f_{xx} = 4 > 0$ handelt es sich um ein Minimum.

Anschauung: Die Kurve der Funktion sieht folgendermaßen aus

- entlang der y-Achse ist $x = 0$ und daher entspricht die Funktion hier dem normalen Cosinus
- parallel zur x-Achse in x_0 ändert sich die y-Komponente nicht, so dass hier eine Parabel zu sehen ist, gestreckt um den Faktor 2 und vertikal verschoben um $\cos(x_0)$.

Wir sehen also eine Rinne mit Cosinus als Grundlage....

b) Ein Vektorfeld $f : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ heißt rotationsfrei, falls rot $f(x,y,z) = \vec{0}$ ist für alle (x,y,z). Geben Sie die λ an, für die

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} \lambda xy - z^3 \\ (\lambda - 2)\, x^2 \\ (1-\lambda)\, xz^2 \end{pmatrix}$$

rotationsfrei ist.

Es ist:

$$rot\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ (1-\lambda)z^2 + 3z^2 \\ \lambda x - (\lambda - 2)2x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$(1-\lambda)z^2 + 3z^2 = (4-\lambda)z^2 = 0 \iff \lambda = 4$$
$$\lambda x - (\lambda - 2)2x = x(\lambda - 2\lambda + 4) = x(-\lambda + 4) = 0 \iff \lambda = 4$$

Für $\lambda = 4$ ist das Vektorfeld rotationsfrei.

Aufgabe 4: Ein Hohlzylinder mit Innenradius $r_i = 6\,\text{cm}$, Außenradius $r_a = 10\,\text{cm}$ und Zylinderhöhe $h_z = 10,5\,\text{cm}$ wird mit Wasser gefüllt, bis die Wasserhöhe $h_w = 10\,\text{cm}$ beträgt. Es sei

V_Z Volumen des Zylinders

V_W Volumen des Wassers

V_K Volumen der Kugeln

entsprechend m_W, m_K Masse des Wassers / der Kugeln

a) Berechnen Sie das Volumen, dass das Wasser einnimmt, mithilfe geometrischer Überlegungen:
Jeder Zylinder besitzt das Volumen: Grundfläche mal Höhe, also bei kreisförmiger Grundfläche $V = \pi r^2 * h$. Ein Hohlzylinder besitzt das Volumen eines normalen Zylinders mit Radius r_a abzüglich des Volumens eines weiteren normalen Zylinders mit Radius r_i, also

$$V_Z = \pi r_a^2 * h_Z - \pi r_i^2 * h_Z = \pi h_Z (r_a^2 - r_i^2)$$

Für das Wasservolumen errechnen wir daher

$$\begin{aligned} V_W &= \pi h_W (r_a^2 - r_i^2) = \pi \cdot 10\text{cm} \cdot \left[(10\text{cm})^2 - (6\text{cm})^2\right] \\ &= \pi \cdot 10 \cdot [100 - 36]\,\text{cm}^3 = \pi \cdot 10 \cdot 64\text{cm}^3 = 640\pi\text{cm}^3 \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie das Volumen, dass das Wasser einnimmt, als Mehrfachintegral:

Zylinderkoordinaten bieten sich an. Damit ist die Parametrisierung:

$0 \leq z \leq h_W$

$r_i \leq r \leq r_a$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

und wir erhalten das Integral

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_i}^{r_a} \int_{z=0}^{h_W} r\, dz\, dr\, d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_i}^{r_a} r\, [\, z\,]_0^{h_W}\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=r_i}^{r_a} r\, h_W\, dr\, d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} h_W\, \frac{1}{2}\, [\, r^2\,]_{r_i}^{r_a}\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2}\, h_W\, (r_a^2 - r_i^2)\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\, h_W\, (r_a^2 - r_i^2)[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\, h_W\, (r_a^2 - r_i^2)\, 2\pi \\
&= \pi\, h_W\, (r_a^2 - r_i^2),
\end{aligned}$$

welches identisch ist mit dem Ergebnis aus Aufgabe a.

c) Drei Kugeln aus Eisen vom Radius $R = 2\,\text{cm}$ werden in dem Wasser versenkt.
Um wieviel steigt der Wasserpegel (Fließt ggf. Wasser über den Rand?)

Das Volumen der drei Kugeln ist

$$V_K = 3 * \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\,\pi\,(2\text{cm})^3 = 32\,\pi$$

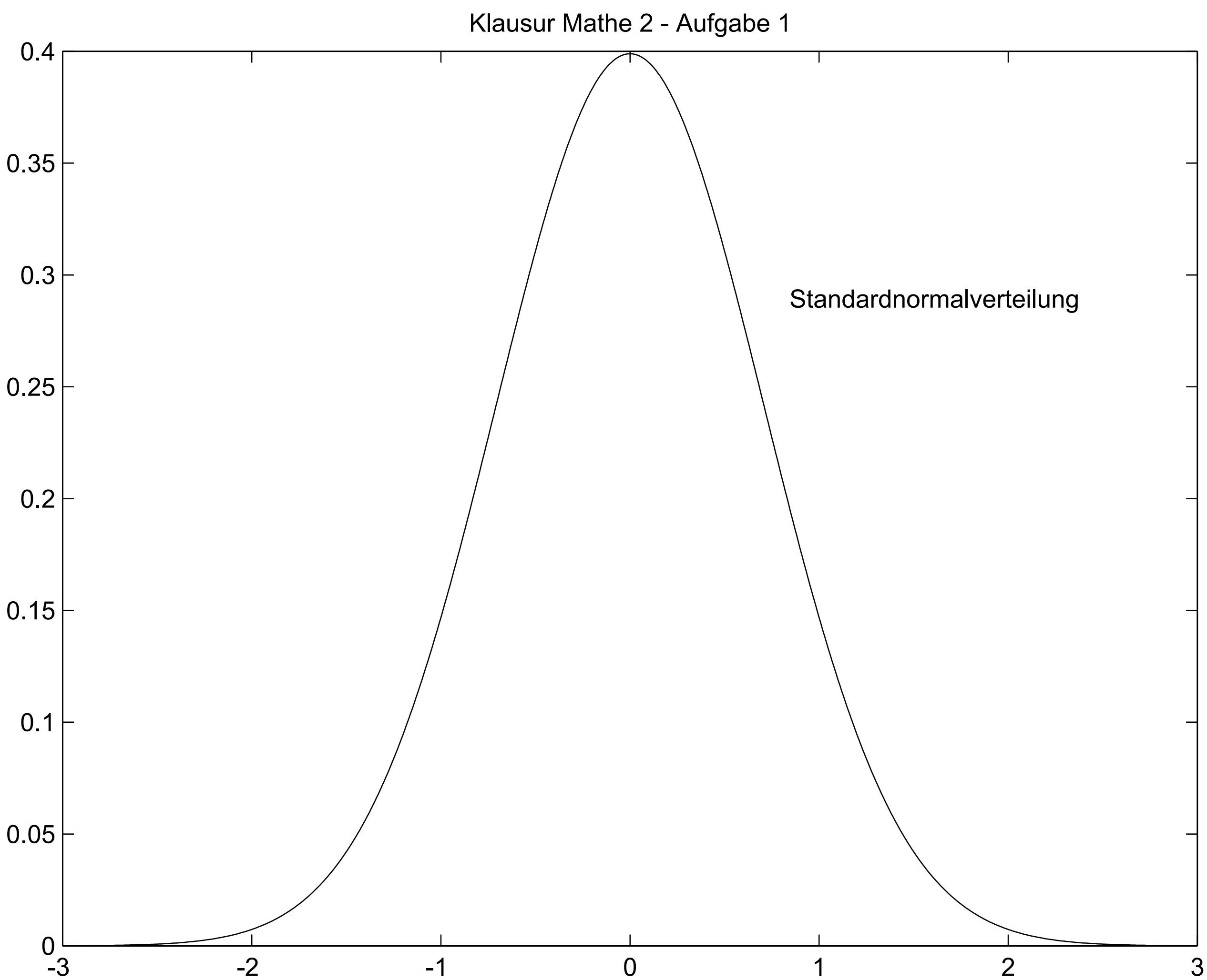
D.h. beim Einbringen in das Wasser verdrängen die Kugeln Wasser vom Volumen 32π.
Statt der $640\pi\text{cm}^3$ sind nun $(640 + 32)\pi\text{cm}^3 = 672\pi\text{cm}^3$ Volumen vorhanden. In das Gefäß passen $V_Z = \pi h_Z \cdot 64\text{cm}^3 = \pi\ 10,5 \cdot 64\text{cm}^3 = 672\pi\text{cm}^3$. Damit passen Wasser und Kugeln genau in das Gefäß ohne, dass etwas überläuft.

d) Berechnen Sie die Gesamtmasse von Wasser und Kugeln in dem Hohlzylinder.

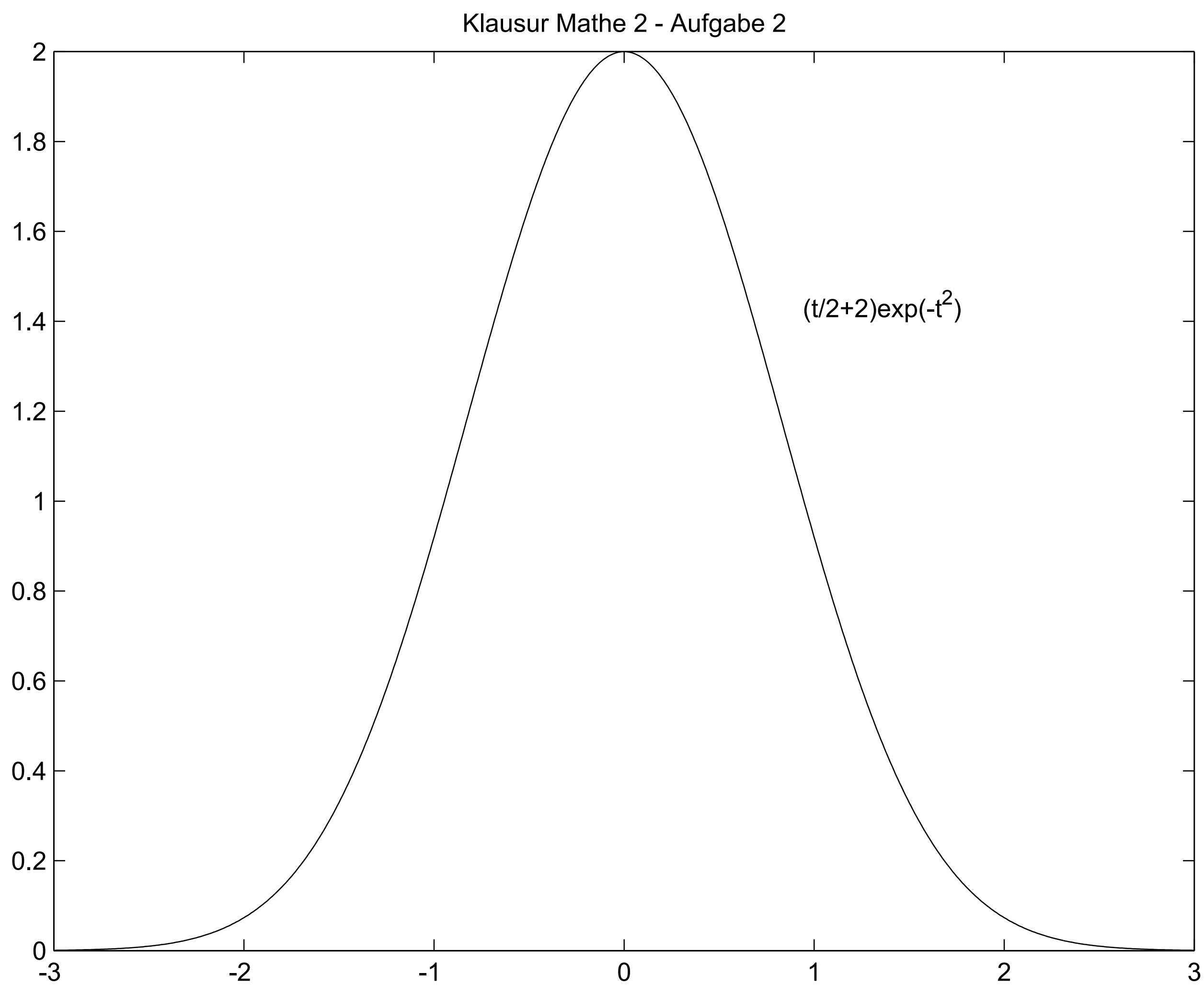
Es sei m die Gesamtmasse. Dann ist $m = m_W + m_K$ die Summe von Wasservolumen und Kugelvolumen. Für die Masse gilt $m = \rho * V$, so dass wir erhalten:

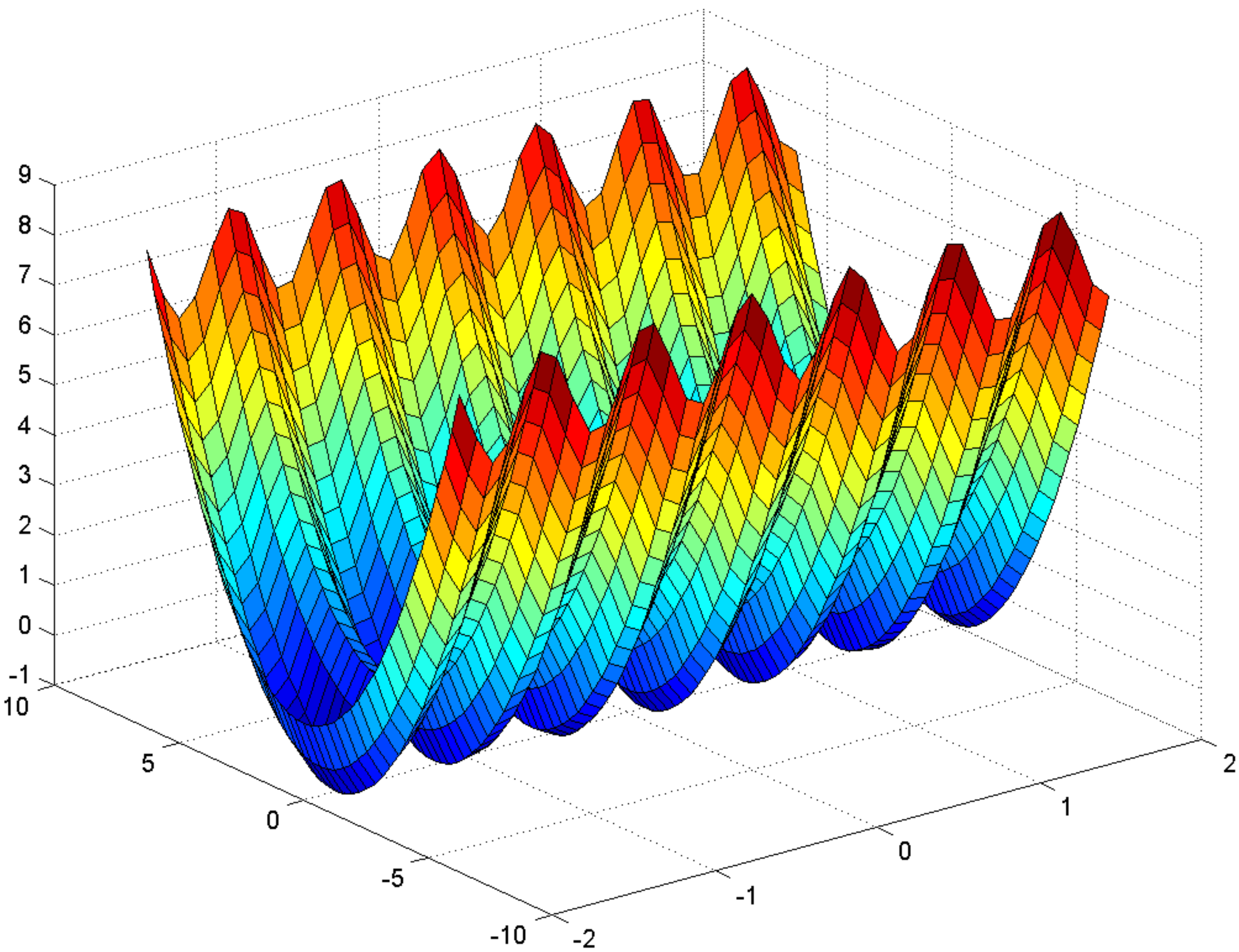
$$m = \rho_{Wasser} \cdot V_W + \rho_{Eisen} \cdot V_K = 1\frac{g}{\text{cm}^3} \cdot 640\pi\text{cm}^3 + 8\frac{g}{\text{cm}^3} \cdot 32\pi\text{cm}^3 = (640 + 256)\pi g = 696\pi g.$$

(Es ist $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $\rho_{Wasser} \approx 1\,\text{g/cm}^3$ und $\rho_{Eisen} \approx 8\,\text{g/cm}^3$.)



Klausur Mathe 2 - Aufgabe 1
Standardnormalverteilung
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-3
-2
-1
0
1
2
3


Klausur Mathe 2 - Aufgabe 2
(t/2+2)exp(-t²)
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-3
-2
-1
0
1
2
3


9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
10
5
0
-5
-10
-2
-1
0
1
2