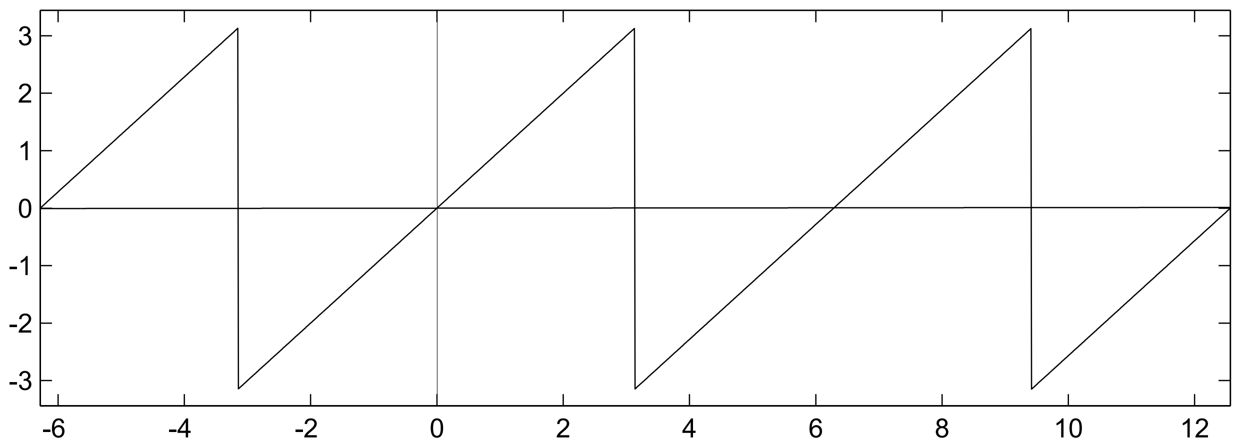
Klausur zur Mathematik 2 für Maschinenbau, 29.10.2005

Lösungen

Aufgabe 1: $f(x)$ ist eine 2π periodische Funktion, die im Intervall $[-\pi,\ \pi[$ durch $f(x) = x$ definiert ist.

a) Skizzieren sie die Funktion im Intervall $[-2\pi,\ 4\pi[$.



b) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

f ist eine ungerade Funktion, d.h. punktsymmetrisch in Null. Daher müssen wir nur die Sinusglieder berechnen. Es ist

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, \sin(nx) \, dx$$

Partielle Integration: $u = x, v' = \sin(nx) \Rightarrow u' = 1, v = -\frac{1}{n}\cos(nx)$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx \right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{-\pi}{n}\cos(-n\pi) + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi) - \frac{1}{n^2}\sin(-n\pi) \right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^2}\sin(n\pi) \right] = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = -\frac{2}{n} \cdot \begin{cases} -1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \ \ 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$f(x) = -2\left[-\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(4x)}{4} \mp \dots \right] = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$$

Aufgabe 2: Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen. Lösen Sie die Anfangswertprobleme und geben Sie die speziellen Lösungen an.

a) $x^2\, y'(x) = x\, y - y^2$, mit $y(1) = 1$

$$x^2\, y'(x) = x\, y - y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y'(x) = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

Substituiere $u = \frac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $y = u\, x$ $\Rightarrow$ $y' = u'\, x + u$ (Produktregel).

Einsetzen in die linke und rechte Seite der Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} u'\, x + u &= u - u^2 \quad \Leftrightarrow \quad u'\, x = -u^2 \quad \Leftrightarrow \quad \int -\frac{1}{u^2}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{u} = \ln(x) + \ln(C) = \ln(Cx) \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{\ln(Cx)} \\ &\Leftrightarrow \quad y = u\, x = \frac{x}{\ln(Cx)} \end{aligned}$$

Anfangswert:

$$y(1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{\ln(C)} \quad \Leftrightarrow \quad C = \exp(1) = e$$

und wir erhalten als Lösung:

$$y(x) = \frac{x}{\ln(ex)} = \frac{x}{\ln(x) + 1}$$

Probe: Die linke Seite ergibt nach Quotientenregel

$$y'(x) = \frac{(\ln x + 1) - x\frac{1}{x}}{(\ln x + 1)^2} = \frac{1}{\ln x + 1} - \frac{1}{(\ln x + 1)^2} \qquad \text{also } x^2\, y'(x) = \frac{x^2}{\ln x + 1} - \frac{x^2}{(\ln x + 1)^2}$$

und stimmt daher mit der rechten Seite überein:

$$x\, y - y^2 = x\, \frac{x}{\ln x + 1} - \left(\frac{x}{\ln x + 1}\right)^2$$

b) $y'(x) = y + \cos x$, (AWP: $y(0) = \frac{7}{2}$) ist eine lineare Dgl. Für den homogenen Anteil gilt:

$$y_h'(x) = y_h \quad \Leftrightarrow \quad y_h(x) = \kappa\, e^x$$

Für die inhomogene Gleichung machen wir einen partikulären Ansatz:

$$y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x) \quad \Leftrightarrow \quad y_p'(x) = A\cos(x) - B\sin(x)$$

den wir in die Differentialgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} y'(x) = y + \cos x \quad &\Leftrightarrow \quad A\cos(x) - B\sin(x) = A\sin(x) + B\cos(x) + \cos(x) \\ &\Leftrightarrow \quad (A - B - 1)\, \cos(x) = (A + B)\, \sin(x) \quad \text{für alle } x \\ &\Leftrightarrow \quad A - B - 1 = 0 \quad \text{und } A + B = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,A = 1 \text{ und } B = -A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \text{ und } B = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt $y_p(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$ und

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \kappa\, e^x + \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)).$$

Anfangswertproblem:

$$y(0) = \frac{7}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \kappa\, e^0 + \frac{1}{2}(\sin(0) - \cos(0)) = \kappa - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \kappa = \frac{8}{2} = 4$$

und wir erhalten die spezielle Lösung

$$y(x) = 4\, e^x + \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)).$$

Probe: Die Ableitung der Funktion ist gegeben durch

$$y'(x) = 4\, e^x + \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)).$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt

$$y'(x) = y + \cos x \quad \Leftrightarrow \quad 4\, e^x + \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) = 4\, e^x + \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + \cos(x)$$

was offensichtlich der Wahrheit entspricht.

Aufgabe 3: Ein Körper ist durch den Paraboloiden $f(r) = -r^2 + 4$ berandet. Nach unten beschränkt die x-y-Ebene den Körper, nach oben wird durch die Ebene $z = 3$ die Spitze abgeschnitten.

b) Wie groß ist das Volumen des Körpers.

Der Körper ist offensichtlich rotationssysmmetrisch. Der innere Teil stellt einen Zylinder dar mit dem Radius:

$$f(r) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -r^2 + 4 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -r^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm 1$$

Da Radien immer positiv sind, kommt nur $r = 1$ in Frage.

Die Parametrisierung für den Winkel ist klar $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Für $0 \leq r \leq 1$ ist die Höhe z gegeben durch $0 \leq z \leq 3$. Für $1 < r \leq 2$ ist die Höhe z durch den Paraboloiden gegeben $0 \leq z \leq -r^2 + 4$.

Das Volumen setzt sich also aus dem äußeren und dem Inneren Anteil zusammen:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^3 r\, dz\, dr\, d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{-r^2+4} r\, dz\, dr\, d\varphi = \ldots = 7\frac{1}{2}$$

(Ich gehe davon aus, dass Sie diese einfachen Integrale lösen können.)

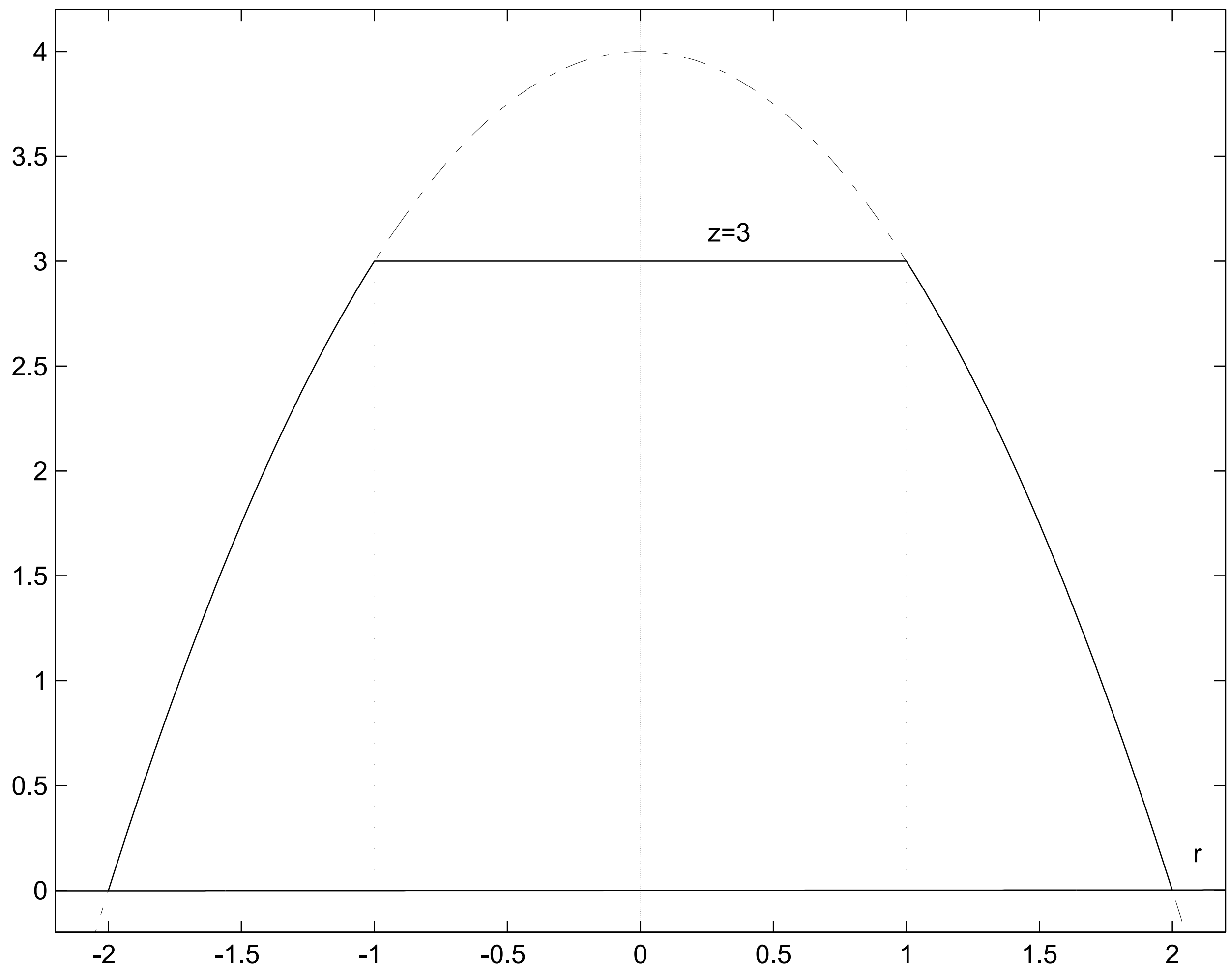
Eine alternative Lösung entsteht durch das Ausnutzen der Rotationssymmetrie. Wir kennen das Integral eines Rotationskörpers. Für eine Funktion $g = g(z)$ ist $V_z = \pi \int g^2(z)\, dz$. Wir brauchen daher die Funktion $g(z)$. Es ist

$$z = -r^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = -z + 4 = g^2(z).$$

Damit folgt

$$V_z = \pi \int_0^3 -z + 4\, dz = \pi \left[-\frac{z^2}{2} + 4z \right]_0^3 = -\frac{9}{2} + 12 = 7\frac{1}{2}.$$

a) Machen Sie eine Skizze!



Aufgabe 4: Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + 7xy^2 + 6x^2 + 12 - 63x.$$

a) Berechnen Sie alle Extrema und Sattelpunkte.

Zur Berechnung von Extreme und Sattelpunkten brauchen wir die ersten partiellen Ableitungen (die beide Null seien müssen) und die zweiten Ableitungen, die über Maximum, Minimum oder Sattelpunkt entscheiden.

Es ist

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 3x^2 + 7y^2 + 12x - 63 \\
f_y(x,y) &= 14xy \\
f_{xx}(x,y) &= 6x + 12 \\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 14y \\
f_{yy}(x,y) &= 14x
\end{aligned}$$

Wir sehen $f_y = 14xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } y = 0.$

- **Fall 1: x=0**
  Dann ist $f_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7y^2 - 63 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 3.$
  Also $P_1 = (0,3),\ P_2 = (0,-3).$

- **Fall 2: y=0**
  Dann ist $f_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 12x - 63 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -7, x_2 = 3.$
  Also $P_3 = (-7,0),\ P_4 = (3,0).$

Also existieren vier mögliche Punkte. Diese werden in die Determinante der Hessematrix eingesetzt.

$$\Delta(P) = f_{xx}(P) \cdot f_y(P) - (f_{xy}(P))^2 = (6x+12) \cdot 14x - (14y)^2$$

Es ist

$\Delta(P_1) = (6 \cdot 0 + 12) \cdot 0 - (14 \cdot 3)^2 = 0 - 42^2 < 0$ also liegt ein Sattelpunkt vor.

$\Delta(P_2) = (6 \cdot 0 + 12) \cdot 0 - (14 \cdot (-3))^2 = 0 - 42^2 < 0$ ebenfalls ein Sattelpunkt.

$\Delta(P_3) = (6 \cdot (-7) + 12) \cdot 14 \cdot (-7) - (14 \cdot 0)^2 = -30 \cdot 14 \cdot (-7) > 0$

dies ist ein Extremum, und da $f_{xx} < 0$ handelt es sich um ein Maximum.

$\Delta(P_4) = (6 \cdot 3 + 12) \cdot 14 \cdot 3 - (14 \cdot 0)^2 = 30 \cdot 14 \cdot 3 > 0$

auch ein Extremum, und da $f_{xx} > 0$ handelt es sich um ein Minimum.

b) Ermitteln Sie den Gradienten im Punkt (0, 0). Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 7y^2 + 12x - 63 \\ 14xy \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} -63 \\ 0 \end{pmatrix}$$