Klausur zur Mathematik 2 für Maschinenbau, 25.6.2005

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = e^x \ln(x).$$

Berechnen Sie die Taylorreihe T_n mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ bis zur vierten Ableitung (Probe: $f^{(5)}(1) = 9e$).

Die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ besitzt die Form:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f(3)(1)}{3!}(x-1)^3 + ... + \frac{f(n)(1)}{n!}(x-1)^n + ...$$

Wir berechnen die ersten fünf Ableitungen. Dabei berechnet sich für jede Funktion $g(x)$ die Ableitung von $e^x\, g(x)$ durch die Produktregel

$$(e^x\, g(x))' = e^x\, g(x) + e^x\, g'(x) = e^x\left(g(x) + g(x)'\right).$$

$$\begin{aligned}
&f(x) = e^x \ln x\\
&f'(x) = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)\\
&f''(x) = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = e^x\left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\\
&f'''(x) = e^x\left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = e^x\left(\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)\\
&f^{(4)}(x) = e^x\left(\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}\right) = e^x\left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4}\right)\\
&f^{(5)}(x) = e^x\left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{12}{x^3} - \frac{24}{x^4} + \frac{24}{x^5}\right)\\
&= e^x\left(\ln x + \frac{5}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{20}{x^3} - \frac{30}{x^4} + \frac{24}{x^5}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f(1) = 0\\
&f'(1) = e\\
&f''(1) = e\,(2-1) = e\\
&f'''(1) = e\,(3-3+2) = 2e\\
&f^{(4)}(1) = e\,(4-6+8-6) = 0\\
&f^{(5)}(1) = e\,(5-10+20-30+24) = 9e
\end{aligned}$$

Damit lautet die Taylorreihe

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{2e}{3!}(x-1)^3 + \frac{0}{4!}(x-1)^4 + \frac{9e}{5!}(x-1)^5 + ...\\
&= e\left((x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{3}{40}(x-1)^5 + ...\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen. Lösen Sie die Anfangswertprobleme und geben Sie die speziellen Lösungen an.

a) $y'(x) = \frac{y}{x} + x^2, \quad \text{mit } y(1) = 1.$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung $y' + f(x)y = g(x)$. Der Koeffizient $f(x) = 1/x$ ist nicht konstant. Daher lösen wir erst die homogene Dgl. und varieren dann die Konstante.

Homogen:

$$y_h'(x) = \frac{y_h}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y_h} dy = \int \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y_h| = \ln|x| + c \quad \Rightarrow \quad y_h = \kappa x \text{ mit } \kappa = \pm e^c.$$

Inomogen:

$$y = \kappa(x)x \quad \Rightarrow \quad y' = \kappa'(x)x + \kappa(x) = \kappa'(x)x + \frac{\kappa(x)x}{x} = \kappa'(x)x + \frac{y}{x} \stackrel{!}{=} \frac{y}{x} + x^2$$

$$\Rightarrow \quad \kappa'(x)x = x^2 \quad \Rightarrow \quad \kappa'(x) = x \quad \Rightarrow \quad \kappa(x) = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \kappa(x)x = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)x = \frac{1}{2}x^3 + Cx$$

Damit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gegeben durch $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + Cx$.

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(1) = \frac{1}{2} + C \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}.$$

Die Lösung des speziellen Problems lautet daher:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x^2 + 1).$$

b) $y'(x) = 3y + 4\sin x, \quad \text{mit } y(0) = 0$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung $y' + f(x)y = g(x)$ mit konstantem Koeffizienten $f(x) = 3$. Daher lösen wir erst die homogene Dgl. und haben dann die Wahl zwischen partikulärem Ansatz und Variation der Konstanten.

Homogen:

$$y_h'(x) = 3y_h \quad \Rightarrow \quad y_h = \kappa e^{3x}.$$

Inomogen - partikulärer Ansatz:

Wir machen einen Ansatz entsprechend der Störfunktion $g(x) = 4\sin x$. Sei

$$y_p = A\sin x + B\cos x$$

$$\Rightarrow \quad y_p' = A\cos x - B\sin x$$

Damit folgt

$$y_p' = 3y_p + 4\sin x$$

$$\Rightarrow \quad A\cos x - B\sin x = 3(A\sin x + B\cos x) + 4\sin x = (3A+4)\ \sin x + 3B\ \cos x$$

$$\Rightarrow \quad A = 3B \quad \text{und} \quad -B = 3A + 4 \quad \Rightarrow \quad -B = 9B + 4 \quad \text{und} \quad A = 3B$$

$$\Rightarrow \quad B = -\frac{2}{5} \quad \text{und} \quad A = -\frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \quad y_p = -\frac{6}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$y = y_p + y_h = -\frac{6}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + \kappa e^{3x}$$

Inomogen - Variation der Konstanten:

$$y = \kappa(x)e^{3x} \quad \Rightarrow \quad y' = \kappa'(x)e^{3x} + 3\kappa(x)e^{3x} = \kappa'(x)e^{3x} + 3y \stackrel{!}{=} 3 + 4\sin x$$

$$\Rightarrow \quad \kappa'(x)e^{3x} = 4\sin x \quad \Rightarrow \quad \kappa'(x) = 4e^{-3x}\sin x$$

$$\Rightarrow \quad \kappa(x) = 4\int e^{-3x}\sin x\ dx$$

Wir lösen das Integral durch Partielle Integration:

$$u = e^{-3x},\ v' = \sin x \quad \Rightarrow \quad u' = -3e^{-3x},\ v = -\cos x x$$

$$\Rightarrow \quad I = \int e^{-3x}\sin x\ dx = \left[-e^{3x}\ \cos x\right] - 3\int e^{-3x}\cos x\ dx$$

$$u = e^{-3x},\ v' = \cos x \quad \Rightarrow \quad u' = -3e^{-3x},\ v = \sin x$$

$$\Rightarrow \quad I = \left[-e^{3x}\ \cos x\right] - 3\left\{\left[e^{-3x}\sin x\right] + 3\int e^{-3x}\sin x\ dx\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \int e^{-3x}\sin x\ dx = \left[-e^{3x}\ \cos x\right] - 3\left[e^{-3x}\sin x\right] - 9\int e^{-3x}\sin x\ dx + k$$

$$\Rightarrow \quad 10\int e^{-3x}\sin x\ dx = -e^{3x}\left[\cos x + 3\ \sin x\right] + k$$

$$\Rightarrow \quad \int e^{-3x}\sin x\ dx = -\frac{e^{3x}}{10}\left[\cos x + 3\ \sin x\right] + k$$

$$\Rightarrow \quad \kappa(x) = 4\int e^{-3x}\sin x\ dx = -\frac{4}{10}e^{3x}\left[\cos x + 3\ \sin x\right] + k = -\frac{2}{5}\left(3\ \sin x + \cos x\right)e^{3x} + k$$

Damit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gegeben durch

$$y(x) = \kappa(x)e^{3x} = -\frac{6}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + ke^{3x},$$

wobei k eine Integrationskonstante ist. Offensichtlich entspricht diese Lösung exakt der Lösung, die wir durch einmen partikulären Ansatz erhalten haben.

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(0) = -\frac{2}{5} + ke^0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{5}.$$

Die Lösung des speziellen Problems lautet daher:

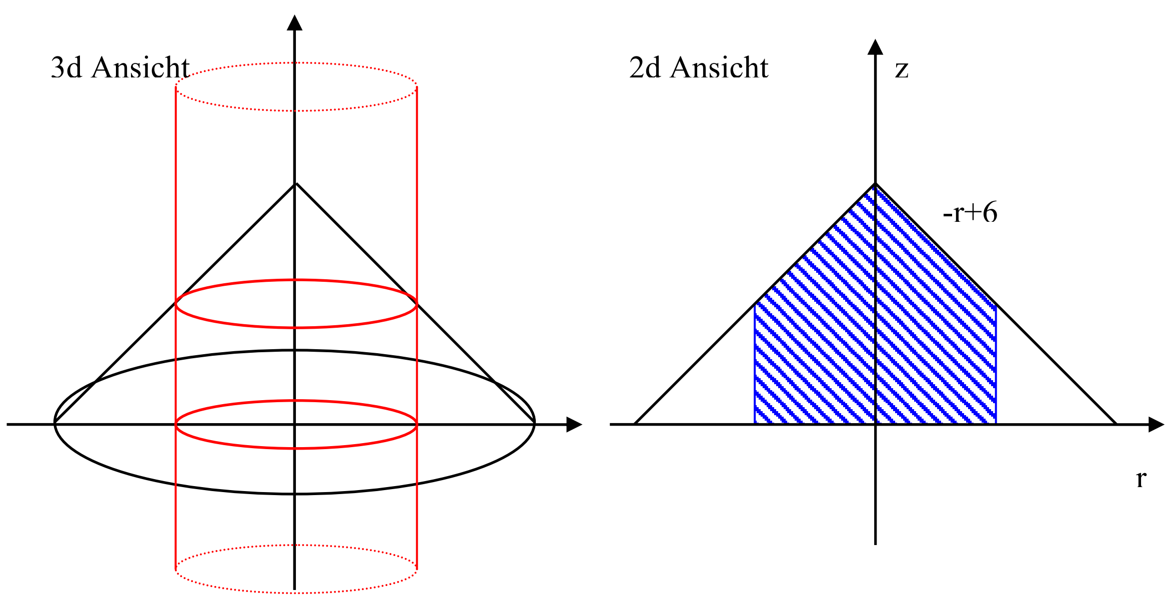
$$y(x) = -\frac{6}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + \frac{2}{5}e^{3x} = -\frac{2}{5}\left(3\,\sin x + \cos x - e^{3x}\right).$$

Aufgabe 3: Gegeben ist der Kegel mit Radius $R = 6$ und Höhe $h = 6$, Rotationsachse ist die z-Achse, die Grundfläche liegt in der x-y-Ebene. Ein Zylinder $x^2 + y^2 = 3^2$ bohrt aus dem Kegel einen Körper heraus. Wie groß ist die Masse

$$M = \int\int\int \rho\, dV$$

des aus dem Kegel herausgebohrten Körpers, wenn die Dichte $\rho = 2$ konstant ist.

Machen Sie eine Skizze!



Mit der Parametrisierung

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi; \qquad 0 \leq r \leq 3; \qquad 0 \leq z \leq -r + 6$$

folgt für das Integral:

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_V \rho\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_0^{-r+6} 2\, r\, dz\, dr\, d\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{3} r[z]_0^{-r+6}\, dr\, d\varphi = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{3} r\,(-r+6)\, dr\, d\varphi = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{3} -r^2+6r\, dr\, d\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi} \left[-\frac{r^3}{3}+3r^2\right]_0^3 d\varphi = 2\int_0^{2\pi} -9+27\, d\varphi = 2\int_0^{2\pi} 18\, d\varphi \\
&= 36\int_0^{2\pi} d\varphi = 36[\varphi]_0^{2\pi} = 72\,\pi
\end{aligned}$$

Der aus dem Kegel herausgebohrte Körper besitzt eine Masse von $72\,\pi$ Masseneinheiten.

Aufgabe 4: Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = y^2 - 6xy + 5x^2 - 8x - 4.$$

a) Berechnen Sie alle Extrema und Sattelpunkte.

Für ein Extremum oder einen Sattelpunkt muss der Gradient der Funktion verschwinden. Ist die Determinante der Hessematrix positiv, so ist der Punkt ein Maximum oder Minimum, bei negativer Determinante handelt es sich um einen Sattelpunkt, verschwindet die Determinante, so ist auf diesem Wege keine Aussage möglich. Wir benötigen also alle ersten und zweiten Ableitungen:

$$f_x(x,y) = -6y + 10x - 8, \qquad f_y(x,y) = 2y - 6x$$

$$f_{xx}(x,y) = 10, \qquad f_{yy}(x,y) = 2 \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -6$$

Der Gradient verschwindet genau dann, wenn...

$$grad\ f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6y+10x-8 \\ 2y-6x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2y - 6x = 0 \quad \text{und} \quad -6y + 10x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = 3x \quad \text{und} \quad -6\,(3x) + 10x - 8 = -18x + 10x - 8 = -8x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -1 \quad \text{und} \quad y = -3$$

Der einzige Kandidat für ein Extremum oder Sattelpunkt ist daher der Punkt $(-1,-3)$. Die Determinante der Hessematrix

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 10\cdot 2 - (-6)^2 = 20 - 36 = -16 < 0$$

ist überall negativ, also ist insbesondere $\Delta(-1,-3) < 0$. Es handelt sich bei dem errechneten Punkt also um einen Sattelpunkt.

b) Ermitteln Sie die Richtung des stärksten Anstiegs im Punkt $(-1, -1)$.

Die Richtung des stärksten Anstieges ist durch den Gradienten gegeben, also ist die Richtung

$$\vec{v} = grad\, f\,(-1, -1) = \begin{pmatrix} -6(-1) + 10(-1) - 8 \\ 2(-1) - 6(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 10 - 8 \\ -2 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P = (-1, -1, f(-1, -1))$.

Die Gleichung der Tangentialebene lautet grundsätzlich

$$z - z_0 = f_x(x, y)(x - x_0) + f_y(x, y)(y - y_0).$$

Dabei ist $x_0 = -1$, $y_0 = -1$, und $z_0 = f(-1, -1) = (-1)^2 - 6(-1)(-1) + 5(-1)^2 - 8(-1) - 4 = 1 - 6 + 5 + 8 - 4 = 4$, und die Ableitungen sind die in (b) errechneten Werte. Es folgt

$$z - 4 = -12(x - (-1) + 4(y - (-1)) = -12x - 12 + 4y + 4 = -12x + 4y - 8.$$

Die Gleichung der Tangentialebene $T(x, y)$ ist somit

$$T(x, y) = z = -12x + 4y - 4.$$